УДК 539.374.001.8

Чигиринский В.В. д.т.н., проф., Бень А.Н.
Запорожский национальный технический университет, г. Запорожье, Украина

РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ В НАПРЯЖЕНИЯХ

Chygyryns'kyy V., Ben' A.
Zaporizhzhya National Technical University, Zaporizhzhya, Ukraine

SOLUTION OF THE PLASTICITY THEORY FLAT TASK AT THE TENSION

Представлено частное решение плоской задачи в аналитическом виде с использованием вложенных гармонических функций. Показаны решения с использованием теории пластического течения. Предложенный результат является более общим решением плоской задачи теории пластичности за счет сложной двухзвенной гармонической функции. Проведен анализ решения задачи для простой упрочняющейся среды, который показывает, что распределение контактных напряжений определяется фактором формы очага деформации и величиной коэффициента трения.

Ключевые слова: *напряжения, гармонические функции, граничные условия, сложные гармонические функции, частное решение*

Введение

В работах [1…3] предложено аналитическое решение плоской задачи теории пластичности в напряжениях и скоростях деформации:

$$\sigma_x = C_\sigma \cdot \exp\theta \cdot \cos A\Phi + \sigma_0 + C$$
$$\sigma_y = -C_\sigma \cdot \exp\theta \cdot \cos A\Phi + \sigma_0 + C$$
$$\tau_{xy} = C_\sigma \cdot \exp\theta \cdot \sin A\Phi \qquad (1)$$
$$\xi_x = -\xi_y = C_\xi \cdot \exp\theta_1 \cdot \cos B\Phi$$
$$\gamma'_{xy} = C_\xi \cdot \exp\theta_1 \cdot \sin B\Phi$$

при
$$\theta_x = -A\Phi_y \qquad \theta_y = A\Phi_x$$
$$\theta_{1x} = -B\Phi_y \qquad \theta_{1y} = B\Phi_x$$

При этом функции θ, $A\Phi$, θ_1 и $B\Phi$ являются гармоническими, т.к. должны, согласно представленным решениям удовлетворять уравнению Лапласа, т.е.

$$\theta_{xx} + \theta_{yy} = 0 \qquad A\Phi_{xx} + A\Phi_{yy} = 0$$
$$\theta_{1xx} + \theta_{1yy} = 0 \qquad B\Phi_{xx} + B\Phi_{yy} = 0 \qquad (2)$$

Решение уравнений (2) для функций θ, $A\Phi$, θ_1 и $B\Phi$ не являются единственными. Выбор подходящей функции зависит от многих факторов, включая граничные и очевидные условия очага деформации. В этом плане представляет интерес построение гармонических функций, их функциональных возможностей для решения конкретных прикладных задач.

Действительно, функции вида

$$C_\sigma \cdot \exp\theta \cdot \cos A\Phi$$
$$C_\sigma \cdot \exp\theta \cdot \sin A\Phi \qquad (3)$$

при $\theta_x = -A\Phi_y \quad \theta_y = A\Phi_x$

также являются гармоническими. Соотношения (3) в дальнейшем можно обобщить, как для решения в напряжениях, так и для решения в деформациях. Покажем это на примере плоской задачи теории пластичности.

Цель

Целью предложенной статьи является аналитическое решение плоской задачи теории пластичности с использованием встроенной сложной двухзвенной гармонической функции. Проведение анализа решения задачи для простой упрочняющейся среды.

Постановка задачи

Согласно [4] имеем:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}=0; \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}=0;\\
&(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\cdot \tau_{xy}{}^2=4\cdot k^2;\\
&\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\cdot \tau_{xy}}=\frac{\xi_x-\xi_y}{\gamma'_{xy}}=F_1;\\
&\xi_x+\xi_y=0;\\
&\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \xi_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \gamma'_{xy}}{\partial y \partial x}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где σ_y, σ_x - нормальные напряжения; τ_{xy} - касательное напряжение; k - сопротивление пластической деформации на сдвиг (переменная величина); ξ_x, ξ_y, γ'_{xy} - скорости деформаций.

Граничные условия заданы в напряжениях [5]

$$\tau_n=-k\cdot \sin\left(A\Phi-2\alpha\right)$$

или

$$\tau_n=(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cdot \sin 2\cdot\alpha-\tau_{xy}\cdot \cos 2\cdot \alpha) \tag{5}$$

Решение задачи

Первые три уравнения можно трансформировать в обобщенное уравнение равновесия вида [4]:

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2}=2\cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\sqrt{k^2-\tau_{xy}^2} \tag{6}$$

Граничное условие (5) будет тождественно удовлетворено, если принять

$$\tau_{xy}=k\cdot \sin A\Phi \tag{7}$$

При этом

$$k=H_\sigma\cdot \exp\theta \tag{8}$$

В данном случае k (8) представляется как математическая величина, которую можно дифференцировать и интегрировать. С физической точки зрения – это упрочняющаяся среда со степенной зависимостью от деформационных параметров.

Выражение (7) задает граничные условия (5), которые замыкают систему уравнений (4). Принимая $H_\sigma=C_\sigma$ и подставляя (7), (8) в (6), получим:

$$
\begin{aligned}
&\left[\theta_{xx}+\left(\theta_x+A\Phi_y\right)^2-\theta_{yy}-\left(\theta_y-A\Phi_x\right)^2+2\cdot A\Phi_{xy}\right]\cdot \sin A\Phi+\left[2\cdot\left(A\Phi_x-\theta_y\right)\cdot\left(\theta_x+A\Phi_y\right)+\right.\\
&\left.+\left(A\Phi_{xx}-A\Phi_{yy}\right)-2\cdot\theta_{xy}\right]\cdot \cos A\Phi=0
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Уравнение (9) тождественно равно нулю, если выражения, стоящие в квадратных скобках равны нулю, т.е.

$$\theta_x=-A\Phi_y,\quad \theta_y=A\Phi_x \tag{10}$$

Соотношения Коши-Римана (10) являются первым звеном решения задачи о гармонических функциях.

Используя соотношения (3) результат можно обобщить, рассматривая решения дифференциального уравнения (6) в более общем виде:

$$
\begin{aligned}
A\Phi&=\left[C_1\cdot \exp\theta'+C_2\cdot \exp\left(-\theta'\right)\right]\cdot\left[C_3\cdot \sin A\Phi'+C_4\cdot \cos A\Phi'\right]\\
\theta&=\left[C_1\cdot \exp\theta'-C_2\cdot \exp\left(-\theta'\right)\right]\cdot\left[C_3\cdot \cos A\Phi'-C_4\cdot \sin A\Phi'\right]
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Функции $A\Phi$ и θ выражения (11) подлежат определению исходя из того, что представленные зависимости должны удовлетворять обобщенное дифференциальное уравнение равновесия (6). Подставим выражения (11) в касательные напряжения τ_{xy} системы (1), полученное выражение – в (6), при этом:

$$A\Phi_x = \left(C_1 \cdot \exp\theta' - C_2 \cdot \exp(-\theta)\right)\cdot\left(C_3 \cdot \sin A\Phi' + C_4 \cdot \cos A\Phi'\right)\cdot \theta'_x + \left(C_1 \cdot \exp\theta' + C_2 \cdot \exp\left(-\theta'\right)\right)\cdot$$
$$\cdot\left(C_3 \cdot \cos A\Phi' - C_4 \cdot \sin A\Phi'\right)\cdot A\Phi'_x$$
$$A\Phi_y = \left(C_1 \cdot \exp\theta' - C_2 \cdot \exp(-\theta)\right)\cdot\left(C_3 \cdot \sin A\Phi' + C_4 \cdot \cos A\Phi'\right)\cdot \theta'_y + \left(C_1 \cdot \exp\theta' + C_2 \cdot \exp\left(-\theta'\right)\right)\cdot$$
$$\cdot\left(C_3 \cdot \cos A\Phi' - C_4 \cdot \sin A\Phi'\right)\cdot A\Phi'_y$$
$$\theta_x = \left(C_1 \cdot \exp\theta' + C_2 \cdot \exp(-\theta)\right)\cdot\left(C_3 \cdot \cos A\Phi' - C_4 \cdot \sin A\Phi'\right)\cdot \theta'_x - \left(C_1 \cdot \exp\theta' - C_2 \cdot \exp\left(-\theta'\right)\right)\cdot$$
$$\cdot\left(C_3 \cdot \sin A\Phi' + C_4 \cdot \cos A\Phi'\right)\cdot A\Phi'_x$$
$$\theta_y = \left(C_1 \cdot \exp\theta' + C_2 \cdot \exp(-\theta)\right)\cdot\left(C_3 \cdot \cos A\Phi' - C_4 \cdot \sin A\Phi'\right)\cdot \theta'_y - \left(C_1 \cdot \exp\theta' - C_2 \cdot \exp\left(-\theta'\right)\right)$$
$$\cdot\left(C_3 \cdot \sin A\Phi' + C_4 \cdot \cos A\Phi'\right)\cdot A\Phi'_y$$

Аналогично определяются вторые производные $A\Phi_{xx}$, $A\Phi_{yy}$, $A\Phi_{xy}$, θ_{xx}, θ_{yy} и θ_{xy}. Дифференциальное уравнение (6) после подстановки принимает вид:

$$\Big\{L_2 \cdot R_2 \cdot \left[\left(\theta'_x + A\Phi'_y\right)^2 - \left(\theta'_y - A\Phi'_x\right)^2\right] + L_1 \cdot R_2 \cdot \left(\theta'_{xx} - \theta'_{yy} + 2\cdot A\Phi'_{xy}\right) + 2\cdot L_1 \cdot R_1 \cdot \left(\theta'_y - A\Phi'_x\right)\cdot\left(\theta'_x + A\Phi'_y\right) -$$
$$- L_2 \cdot R_1 \cdot \left(A\Phi'_{xx} - A\Phi'_{yy} - 2\cdot\theta'_{xy}\right) + \left[L_1 \cdot R_2 \cdot \left(\theta'_x + A\Phi'_y\right) - L_2 \cdot R_1 \cdot \left(\theta'_y - A\Phi'_x\right)\right]^2 - \Big[L_1 \cdot R_2 \cdot \left(\theta'_y - A\Phi'_x\right) -$$
$$- L_2 \cdot R_1 \cdot \left(\theta'_x + A\Phi'_y\right)\Big]^2\Big\}\cdot \sin A\Phi + \Big\{2\cdot\left[L_1 \cdot R_2 \cdot \left(\theta'_y - A\Phi'_x\right) - L_2 \cdot R_1 \cdot \left(A\Phi'_y + \theta'_x\right)\right]\cdot\Big[L_1 \cdot R_2 \cdot \left(\theta'_x + A\Phi'_y\right) -$$
$$- L_2 \cdot R_1 \cdot \left(A\Phi'_x - \theta'_y\right)\Big] + L_1 \cdot R_1 \cdot \left[\left(\theta'_x + A\Phi'_y\right)^2 - \left(\theta'_y - A\Phi'_x\right)^2\right] + L_2 \cdot R_1 \cdot \left(\theta'_{xx} - \theta'_{yy} + 2\cdot A\Phi'_{xy}\right) - 2\cdot L_2 \cdot R_2 \cdot$$
$$\cdot\left(\theta'_y - A\Phi'_x\right)\cdot\left(\theta'_x + A\Phi'_y\right) + L_1 \cdot R_2 \cdot \left(A\Phi'_{xx} - A\Phi'_{yy} - 2\cdot\theta'_{xy}\right)\Big\}\cdot \cos A\Phi = 0, \tag{12}$$

где
$$L_1 = C_1 \cdot \exp\theta' + C_2 \cdot \exp\left(-\theta'\right) \qquad R_1 = C_3 \cdot \sin A\Phi' + C_4 \cdot \cos A\Phi'$$
$$L_2 = C_1 \cdot \exp\theta' - C_2 \cdot \exp\left(-\theta'\right) \qquad R_2 = C_3 \cdot \cos A\Phi' - C_4 \cdot \sin A\Phi'$$

Преобразованное обобщенное уравнение равновесия (12) может быть упрощено, если

$$\theta'_x = -A\Phi'_y$$
$$\theta'_y = A\Phi'_x \tag{13}$$

Соотношения Коши-Римана (13) является вторым звеном решения задачи о гармонических функциях. Следуя (13) вложенные функции $A\Phi'$ и θ' также должны быть гармоническими, удовлетворяя при этом уравнение Лапласа:

$$A\Phi'_{xx} + A\Phi'_{yy} = 0$$
$$\theta'_{xx} + \theta'_{yy} = 0 \tag{14}$$

При этом соотношения (13) упрощают дифференциальное уравнение (12) и приводят его к виду:

$$\left[L_1 \cdot R_2 \cdot \left(\theta'_{xx} - \theta'_{yy} + 2\cdot A\Phi'_{xy}\right) - L_2 \cdot R_1 \cdot \left(A\Phi'_{xx} - A\Phi'_{yy} - 2\cdot\theta'_{xy}\right)\right]\cdot \sin A\Phi +$$
$$+\left[L_2 \cdot R_1 \cdot \left(\theta'_{xx} - \theta'_{yy} + 2\cdot A\Phi'_{xy}\right) + L_1 \cdot R_2 \cdot \left(A\Phi'_{xx} - A\Phi'_{yy} - 2\cdot\theta'_{xy}\right)\right]\cdot \cos A\Phi = 0 \tag{15}$$

С учетом выражений (13), имеем вторые частные производные:

$$\theta'_{xx} = -A\Phi'_{xy} \qquad A\Phi'_{xx} = \theta'_{xy}$$
$$\theta'_{yy} = A\Phi'_{xy} \qquad A\Phi'_{yy} = -\theta'_{xy} \tag{16}$$

Соотношения (16) превращают операторы в круглых скобках в выражении (15) равными нулю, т.е. уравнение равновесия (12) тождественно удовлетворено. Покажем, что функции (11), которые являются определяющими при расчете напряжений, являются гармоническими при $C_4 = 0$, $C_3 = 1$:

Подставим $A\Phi$ из (11) в уравнение Лапласа (14), имеем уравнение Лапласа вида:

$$\sin A\Phi' \cdot \Big\{C_1 \cdot \exp\theta' \cdot \left[\theta'_{xx} + \left(\theta'_x + A\Phi'_y\right)\cdot\left(\theta'_x - A\Phi'_y\right) + \theta'_{yy} + \left(\theta'_y + A\Phi'_x\right)\cdot\left(\theta'_y - A\Phi'_x\right)\right] - C_2 \cdot \exp\left(-\theta'\right)\cdot\Big[\theta'_{xx} -$$
$$-\left(\theta'_x + A\Phi'_y\right)\cdot\left(\theta'_x - A\Phi'_y\right) - \left(\theta'_y + A\Phi'_x\right)\cdot\left(\theta'_y - A\Phi'_x\right) + \theta'_{yy}\Big]\Big\} + \cos A\Phi' \cdot \Big\{C_1 \cdot \exp\theta' \cdot \Big[2\cdot\theta'_x \cdot A\Phi'_x + 2\cdot\theta'_y \cdot A\Phi'_y + \tag{17}$$
$$+ A\Phi'_{xx} + A\Phi'_{yy}\Big] - C_2 \cdot \exp(-\theta)\cdot\left[2\cdot\theta'_x \cdot A\Phi'_x - A\Phi'_{xx} + 2\cdot\theta'_y \cdot A\Phi'_y - A\Phi'_{yy}\right]\Big\} = 0$$

Уравнение Лапласа (17) будет тождественно удовлетворено, если

$$\theta_x^{'} = -A\Phi_y^{'}$$

$$\theta_y^{'} = A\Phi_x^{'}$$

Следовательно, как и для (12), тождество будет иметь место, если выполняются условия Коши-Римана (13). Анализ показывает, что комбинация функций (3) является гармонической функцией.

Таким образом, решение обобщенного уравнения равновесия с учетом вложенных гармонических функций имеет вид:

$$\tau_{xy} = C_\sigma \cdot \exp\theta \cdot \sin A\Phi$$

$$\theta_x = -A\Phi_y, \ \theta_y = A\Phi_x$$

$$A\Phi = \left[C_1 \cdot \exp\theta^{'} + C_2 \cdot \exp\left(-\theta^{'}\right)\right] \cdot \left[C_3 \cdot \sin A\Phi^{'} + C_4 \cdot \cos A\Phi^{'}\right] \qquad (18)$$

$$\theta = \left[C_1 \cdot \exp\theta^{'} - C_2 \cdot \exp\left(-\theta^{'}\right)\right] \cdot \left[C_3 \cdot \cos A\Phi^{'} - C_4 \cdot \sin A\Phi^{'}\right]$$

$$\theta_x^{'} = -A\Phi_y^{'}, \ \theta_y^{'} = A\Phi_x^{'}$$

Из выражения (18) имеем сложную двухзвенную вложенную гармоническую функцию, на которую дважды наложено условие гармоничности (1) и (13).

Подставляя выражения (18) в уравнение равновесия системы (1) определяем нормальные напряжения σ_x и σ_y:

$$\sigma_x = C_\sigma \cdot \exp\left\{\left[C_1 \cdot \exp\theta^{'} - C_2 \cdot \exp\left(-\theta^{'}\right)\right] \cdot \left[C_3 \cdot \cos A\Phi^{'} - C_4 \cdot \sin A\Phi^{'}\right]\right\} \cdot$$

$$\cdot \cos\left\{\left[C_1 \cdot \exp\theta^{'} + C_2 \cdot \exp\left(-\theta^{'}\right)\right] \cdot \left[C_3 \cdot \sin A\Phi^{'} + C_4 \cdot \cos A\Phi^{'}\right]\right\} + \sigma_0 + f(y)$$

$$\sigma_y = -C_\sigma \cdot \exp\left\{\left[C_1 \cdot \exp\theta^{'} - C_2 \cdot \exp\left(-\theta^{'}\right)\right] \cdot \left[C_3 \cdot \cos A\Phi^{'} - C_4 \cdot \sin A\Phi^{'}\right]\right\} \cdot$$

$$\cdot \cos\left\{\left[C_1 \cdot \exp\theta^{'} + C_2 \cdot \exp\left(-\theta^{'}\right)\right] \cdot \left[C_3 \cdot \sin A\Phi^{'} + C_4 \cdot \cos A\Phi^{'}\right]\right\} + \sigma_0 + f(x) \qquad (19)$$

$$\tau_{xy} = C_\sigma \cdot \exp\left\{\left[C_1 \cdot \exp\theta^{'} - C_2 \cdot \exp\left(-\theta^{'}\right)\right] \cdot \left[C_3 \cdot \cos A\Phi^{'} - C_4 \cdot \sin A\Phi^{'}\right]\right\} \cdot$$

$$\cdot \sin\left\{\left[C_1 \cdot \exp\theta^{'} + C_2 \cdot \exp\left(-\theta^{'}\right)\right] \cdot \left[C_3 \cdot \sin A\Phi^{'} + C_4 \cdot \cos A\Phi^{'}\right]\right\}$$

Анализ полученных результатов

Функции (11) сложнее в записи, чем функции θ и $A\Phi$ без вложения. Их вид в упрощенном варианте:

$$A\Phi = AA_6 \cdot x \cdot y$$

$$\theta = -0.5 \cdot AA_6 \cdot \left(x^2 - y^2\right)$$

Кроме этого появляются комбинации тригонометрических и экспоненциальных функций, которые в первом звене не могут быть решением обобщенного уравнения равновесия и уравнений равновесия.

Для анализа упростим выражение (19), приняв $C_2 = C_4 = 0$, $C_1 = C_3 = C$, тогда

$$\sigma_x = C_\sigma \cdot \exp\left(C \cdot \exp\theta^{'} \cdot \cos A\Phi^{'}\right) \cdot \cos\left(C \cdot \exp\theta^{'} \cdot \sin A\Phi^{'}\right) + \sigma_0 + C;$$

$$\sigma_y = -C_\sigma \cdot \exp\left(C \cdot \exp\theta^{'} \cdot \cos A\Phi^{'}\right) \cdot \cos\left(C \cdot \exp\theta^{'} \cdot \sin A\Phi^{'}\right) + \sigma_0 + C; \qquad (20)$$

$$\tau_{xy} = C_\sigma \cdot \exp\left(C \cdot \exp\theta^{'} \cdot \cos A\Phi^{'}\right) \cdot \sin\left(C \cdot \exp\theta^{'} \cdot \sin A\Phi^{'}\right)$$

Из (14) вложенные гармонические функции $A\Phi^{'}$ и $\theta^{'}$ имеют вид:

$$A\Phi^{'} = AA_6 \cdot x \cdot y$$

$$\theta^{'} = -0.5 \cdot AA_6 \cdot \left(x^2 - y^2\right)$$

где AA_6 - постоянная величина.

Постоянные интегрирования и функции определились из граничных и очевидных условий, включая среднее напряжение:

$$C = \frac{A\Phi_0}{\exp\theta_0^{'} \cdot \cos A\Phi_0^{'}}$$

$$A\Phi_0^{'} = AA_6 \cdot \frac{L \cdot H}{4}$$

$$\theta_0^{'} = -0.5 \cdot AA_6 \cdot \left(\frac{L^2}{4} - \frac{H^2}{4}\right)$$

Подставляя граничные условия для осадки, выраженные через напряжения, получим:

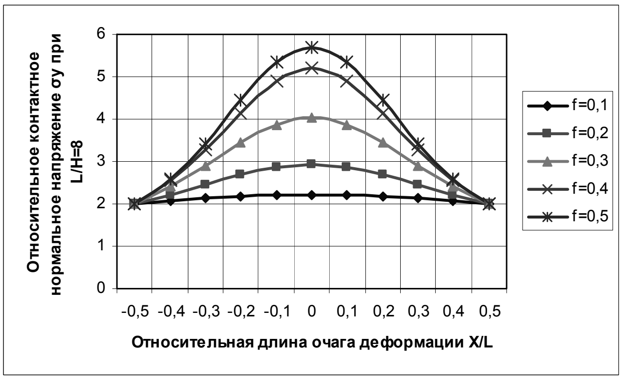
$$AA_6 = \frac{4}{L \cdot H} \cdot arctg\left(A\Phi_0\right) \qquad A\Phi_0 = arctg\psi \qquad \psi = 1{,}3 \cdot f \cdot \left(1 - f\right)$$

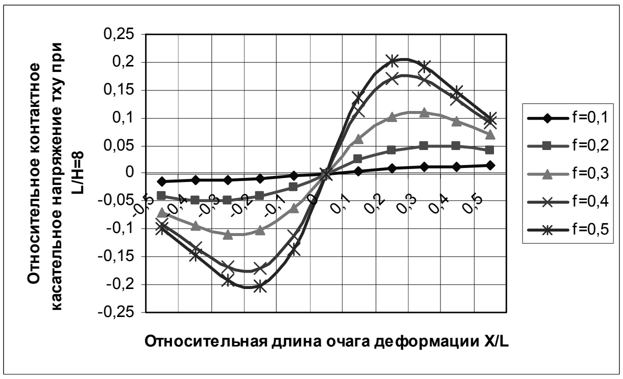
где L, H - длина и высота очага деформации; f - коэффициент трения.

Из условия пластичности $\sigma_0 = -2 \cdot k \cdot \cos A\Phi$, $C = k_0$. Подставляя в (20) постоянные выражения, имеем

$$\sigma_x = -C_\sigma \cdot \exp\left(C \cdot \exp\theta_0' \cdot \cos A\Phi_0'\right) \cdot \frac{\exp\left[C \cdot \left(\exp\theta' \cdot \cos A\Phi' - \exp\theta_0' \cdot \cos A\Phi_0'\right)\right]}{\cos\left(C \cdot \exp\theta_0' \cdot \sin A\Phi_0'\right)} \cdot$$
$$\cdot \cos\left(C \cdot \exp\theta' \cdot \sin A\Phi'\right) + C_\sigma \cdot \exp\left(C \cdot \exp\theta_0' \cdot \cos A\Phi_0'\right)$$
$$\sigma_y = -3 \cdot C_\sigma \cdot \exp\left(C \cdot \exp\theta_0' \cdot \cos A\Phi_0'\right) \cdot \frac{\exp\left[C \cdot \left(\exp\theta' \cdot \cos A\Phi' - \exp\theta_0' \cdot \cos A\Phi_0'\right)\right]}{\cos\left(C \cdot \exp\theta_0' \cdot \sin A\Phi_0'\right)} \cdot \tag{21}$$
$$\cdot \cos\left(C \cdot \exp\theta' \cdot \sin A\Phi'\right) + C_\sigma \cdot \exp\left(C \cdot \exp\theta_0' \cdot \cos A\Phi_0'\right)$$
$$\tau_{xy} = C_\sigma \cdot \exp\left(C \cdot \exp\theta_0' \cdot \cos A\Phi_0'\right) \cdot \frac{\exp\left[C \cdot \left(\exp\theta' \cdot \cos A\Phi' - \exp\theta_0' \cdot \cos A\Phi_0'\right)\right]}{\cos\left(C \cdot \exp\theta_0' \cdot \sin A\Phi_0'\right)} \cdot \sin\left(C \cdot \exp\theta' \cdot \sin A\Phi'\right)$$

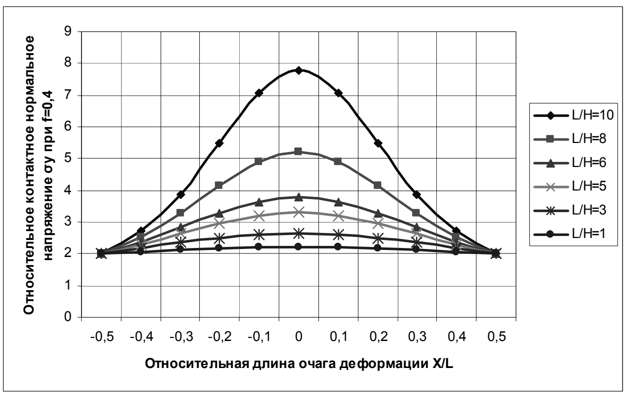
Результаты расчета по формулам (21) приведены на рис 1-2. Анализ графических зависимостей показывает, что распределение контактных напряжений реагирует на фактор формы очага деформации и коэффициент трения. Полученные значения качественно и количественно отражают общие закономерности распределения компонентов тензора напряжений в очаге деформации и в полной мере удовлетворяют граничным условиям [6]. Следует подчеркнуть, что полученные выражения едины для всего очага деформации.

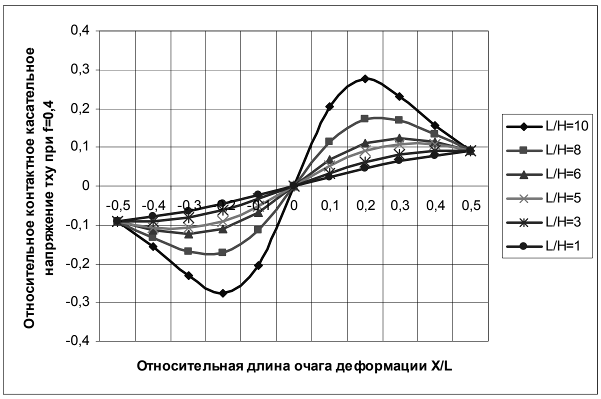




а *б*

Рис. 1. Распределение нормальных (*а*) и касательных (*б*) напряжений по высоте полосы при осадке $L/H = 8$, $f = 0{,}1...0{,}5$





а *б*

Рис. 2. Распределение нормальных (*а*) и касательных (*б*) напряжений по высоте полосы при осадке $f = 0{,}4$, $L/H = 1...10$

Выводы

1. Получено частное решение плоской задачи теории пластичности в напряжениях за счет использования вложенных гармонических функций. Результат в этом случае является более приемлемым для удовлетворения граничных и очевидных условий очага деформации различных процессов ОМД.

2. Аргументы экспоненциальной и тригонометрической функций θ и *АФ* могут использовать построения вида $\exp\theta^{'} \cdot \cos A\Phi^{'}$ и $\exp\theta^{'} \cdot \sin A\Phi^{'}$.

3. Расчет напряжений показывает, что они качественно и количественно соответствуют общепринятым данным.

Анотація. *Представлено частинне рішення плоскої задачі в аналітичному вигляді з використанням вкладених гармонійних функцій. Показано рішення з використанням теорії пластичного плину. Запропонований результат є більш загальним рішенням плоскої задачі теорії пластичності за рахунок складної дволанкової гармонійної функції. Проведено аналіз рішення задачі для простого середовища, що зміцнюється, який показує, що розподіл контактних напружень визначається фактором форми осередку деформації та величиною коефіцієнта тертя.*
Ключові слова: *напруження, гармонійні функції, граничні умови, складні гармонійні функції, частинне рішення*

Abstract. *Purpose. The analytical solution of the plasticity theory flat task with using the built-in difficult double-link harmonic function. The analysis of a task solution for the simple being strengthened environment is carrying out.*

Methodology. At the basis of the flat task closed solution the general approaches of the analytical tasks solution with using harmonic functions are developed. Decisions with using the plastic current theory are shown. Possibility of implementation of the decision with using the enclosed harmonious coordinate functions shows that there is an area of admissible values in limits in which the real result of distribution of tension is received.

Results. The solution of a flat task of the plasticity theory at tension at the general view, at the expense of using the enclosed harmonious functions is received. It is remarkable that fields of tension are described by one analytical expression without splitting into separate sites of all deformation centers. Expressions for definition of tensor tension components with using the enclosed harmonic functions are received.

Originality. The method of the plasticity theory tasks solution with using a plastic metal forms change mathematical model with the enclosed harmonious functions is developed.
Keywords: Tensions, Harmonic Functions, Scope Terms, Form's Factor, Friction's Factor

1. *Чигиринский В.В.* Обобщенная теория пластичности. Модель сложной пластической среды / В.В. Чигиринский, А.Я. Качан, А.Н. Бень // Вестник национального технического университета Украины. Политехнический институт. – 2008. – С. 141-148.
2. *Чигиринский В.В.* Некоторые особенности обобщенной теории пластичности для упрочняющейся среды / В.В. Чигиринский, А.Н. Бень // Вестник двигателестроения. – 2008. – № 2. – С. 8-12.
3. *Chygyryns'kyy V.V.* A Generalised Theory of Plasticity [Text] / V.V. Chygyryns'kyy, A.Ya. Kachan, I. Mamuzić, A.N. Ben' // Materials and Technology. Institute of Metals and Technology – Liubljana, Slovenija. – 2010. – POB 431. – P. 141-145.
4. *Смирнов В.С.* Теория обработки металлов давлением / В.С. Смирнов. – М.: Металлургия,1973. – 496 с. – (уч. для студ. вузов, обучающихся по спец. "ОМД").
5. *Малинин, Н.Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести / Н.Н. Малинин. - М.: Машиностроение, 1975. – 399 с. – (уч. для студ. машиностр. спец. вузов).
6. *Сторожев М.В.* Теория обработки металлов давлением / М.В. Сторожев, Е.А. Попов. - М.: Машиностроение, 1977. - 424 с. – (уч. для маиностр. и политехн. вузов).

REFERENCES

1. *Chigirinskij V.V.*, Kachan A.Ja., Ben' A.N. Vestnik nacional'nogo tehnicheskogo universiteta Ukrainy. Politehnicheskij institut – Herald of National Technical University of Ukraine. Polytechnical institute, 2008, pp. 141-148.
2. *Chigirinskij V.V.*, Ben' A.N. Vestnik dvigatelestroenija –Herald of Aeroenginebuilding, 2008, no. 2, pp. 8-12.
3. *Chygyryns'kyy V.V.,* Kachan A.Ya., Mamuzić I., Ben' A.N. Materials and Technology. Institute of Metals and Technology, 2010, POB 431, pp. 141-145.
4. *Smirnov V.S.* Teorija obrabotki metallov davleniem [Theory of Metals Pressure Processing]. Moscow, Metall.,1973. 496 p.
5. *Malinin, N.N.* Prikladnaja teorija plastichnosti i polzuchesti [The Applied Theory of Plasticity and Creep]. Moscow, Mashin., 1975. 399 p.
6. *Ctorozhev M.V.* Teorija obrabotki metallov davleniem [Theory of Metals Pressure Processing]. Moscow, Mashin., 1977. 424 p.